

## 1.3 Algebra sudova

### Sudovi

Osnovni pojam u logici je sud. Logika definira sud na slijedeći način: Spoj dvaju pojmova, u kome se o odnosu jednog prema drugom nešto tvrdi, naziva se sud.

#### Primjer 1.3.1

Sudovi su slijedeće rečenice:

Nebo je plavo.

Sokrat je Grk.

Dva nije jednako pet.

Svaki sud može se ocijeniti sa gledišta istinitosti, tj. može se ustanoviti da li je neki sud istinit ili neistinit. Svako drugo svojstvo suda u logici je nebitno. U tom smislu svaka rečenica ne mora biti sud. Tako primjerice rečenica "Da li je ovaj pjevač popularan?" nije sud, jer se ne može reći da je rečenica istinita ili neistinita.

Na temelju istinitosti nekog suda poduzimaju se određene radnje ili donose odluke, kako u svakodnevnom životu, tako i u raznim tehničkim uređajima, pa i računalima. Primjerice, istinitost suda "Temperatura u sobi pala je ispod 20 stupnjeva." znak je da trebamo uključiti grijalicu. To možemo načiniti ručno, ali to može umjesto čovjeka učiniti i računalo opremljeno odgovarajućim osjetilom temperature i relejom.

### Relacijski operatori

Pri pisanju programa za računala često se koriste (primjerice u naredbama tipa ako... tada...) sudovi građeni od relacijskih operatora. Relacijski operatori utvrđuju odnose između vrijednosti napisane s njihove lijeve i desne strane. Relacijski simboli i njihova značenja prikazani su u slijedećoj tablici.

relacijski simbol	značenje
<	"je manje od" ili "prethodi" ili "dolazi ispred"
>	"je veće od" ili "slijedi" ili "dolazi iza"
=	"je jednako"
≤ ili <=	"je manje ili jednako"
≥ ili >=	"je veće ili jednako"
≠ ili <>	"je različito" ili "nije jednako"

Relacijski operatori mogu se primijeniti na elemente bilo kojeg uređenog skupa, tj. na skupa čiji se elementi mogu uspoređivati. Takvi su primjerice skupovi prirodnih, cijelih i realnih brojeva, slova abecede, mjeseci u godini, itd.

#### Primjer 1.3.2

Utvrđite istinitost slijedećih sudova:  $12 < 4$ ,  $3 = 2+1$ ,  $100 \geq 50$ .

Sud " $12 < 4$ " je neistinit.

Sud " $3 = 2+1$ " je istinit.

Sud " $100 \geq 50$ " je istinit.

#### Primjer 1.3.3

Utvrđite istinitost slijedećih sudova: "srijeda < petak", "nedjelja > subota", "nedjelja < subota".

Sud "srijeda < petak" je istinit, jer srijeda prethodi petku.

Sud "nedjelja > subota" je istinit, jer nedjelja dolazi iza subote.

Sud "nedjelja < subota" je neistinit, jer nedjelja ne dolazi prije subote.

**Primjer 1.3.4**

Utvrđite istinitost slijedećih sudova: "a<b", "c=b", f>o".

Sud "a < b" je istinit jer slovo a u abecedi dolazi prije slova b.

Sud "c = b" je neistinit jer slovo c nije jednako slovu b, c dolazi poslije b.

Sud "f > o" je neistinit jer slovo f ne dolazi poslije slova o.

Ponekad neku odluku nije moguće donijeti na temelju jednog suda, već na temelju složenog suda. Složeni sudovi mogu se graditi od osnovnih sudova, koji se sastoje od jednog subjekta i jednog predikata. Složeni sudovi se sastoje od osnovnih sudova, logičkih operatora i zagrada.

**Logički operatori**

Sudovima i složenim sudovima bavi se posebna grana matematike - matematička logika. Temelj matematičke logike čini algebra sudova koja se ponekad naziva i logička algebra ili Booleova algebra (George Boole bio je poznati britanski matematičar i logičar)

U daljnjem tekstu sudove ćemo označavati velikim slovima: A, B, C, .. Istinitost suda označavati ćemo s 1 ako je sud istinit, a s 0 ako je sud neistinit. Tako će A = 1 značiti da je sud označen s A istinit, a B = 0 značiti će da je sud označen s B neistinit. U literaturi se susreću i druge oznake, na primjer umjesto oznake 1 možemo koristiti slovo T (od engleskog true), a umjesto oznake 0 možemo koristiti oznaku F (od engleskog false).

Ovdje će biti opisana tri osnovna logička operatora: i, ili i ne. Njihovi simboli dani su u slijedećoj tablici.

Naziv operacije	simbol
negacija (ne)	$\neg$
konjunkcija (i)	$\cap, \bullet$
disjunkcija (ili)	$\cup, +$

**Negacija**

Negacija je unarna operacija, tj. djeluje samo na jedan sud. Ako je A = 1, tj. ako je sud A istinit, tada je novi, složeni sud  $\neg A$  (čitaj ne A) neistinit. Ako je B = 0, tj. ako je sud B neistinit tada je novi sud  $\neg B$  istinit. Slijedeća tablica prikazuje moguće vrijednosti suda A i složenog suda S, koji je dobiven negacijom suda A, tj.  $S \equiv \neg A$ . Simbol  $\equiv$  je simbol koji označava da su lijeva i desna strana jednakovrijedne ili ekvivalentne i zove se simbolom ekvivalencije.

A	S $\equiv \neg A$
0	1
1	0

**Primjer 1.3.5**

Slijedeća tablica prikazuje neke sudove, njihovu istinitost i njihovu negaciju:

sud A	vrijednost suda A	vrijednost suda $\neg A$	sud S $\equiv \neg A$
"12 < 4"	0	1	"12 > 4"
"100 = 100"	1	0	"100 $\neq$ 100"
"Utorak > Srijeda"	0	1	"Utorak < Srijeda"
"Sokrat je Grk"	1	0	"Sokrat nije Grk"
"Sunce nije zvijezda"	0	1	"Sunce je zvijezda"

**Konjunkcija**

Ako su A i B sudovi, tada pomoću operatora konjunkcije  $\bullet$  dobivamo složeni sud  $S \equiv A \bullet B$  (čitaj A i B). Sud S biti će istinit onda i samo onda ako su i sud A i sud B istiniti. Zbog toga se konjunkcija zove i I operacijom, odnosno AND operacijom (*and* na engleskom znači i). Slijedeća tablica prikazuje moguće vrijednosti sudova A i B, te odgovarajuće vrijednosti suda  $S \equiv A \bullet B$ .

A	B	$S \equiv A \bullet B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Konjunkcija je binarna operacija, tj. operacija koja ima dva operanda (kao što je i operacija zbrajanja binarna operacija jer ima dva operanda, npr. 2+3).

**Primjer 1.3.6**

Utvrđite vrijednost suda  $S \equiv (2 < 3) \bullet (3 = 2 + 2)$ .

Sud "2 < 3" je istinit, ali je sud "3 = 2 + 2" neistinit, pa prema definiciji konjunkcije, zaključujemo da je sud S neistinit.

**Primjer 1.3.7**

Odluka za upis u određenu školu može se donijeti na temelju složenog suda: "Učenik ima propisan broj bodova za upis i učenika interesira nastavni plan i program te škole". Vidimo da je ovo primjer konjunkcije, jer će učenik odluku o upisu donijeti samo ako su oba osnovna suda istinita.

**Disjunkcija**

Ako su A i B sudovi tada pomoću operatora + dobivamo novi, složeni sud  $S \equiv A + B$ , koji je istinit ako je jedan od sudova istinit, ili ako su oba suda istinita. Zbog toga se disjunkcija naziva i ILI operacijom, odnosno OR operacijom (engleski *or* znači ili). Slijedeća tablica prikazuje moguće vrijednosti sudova A i B, te odgovarajuće vrijednosti suda  $S \equiv A + B$ .

A	B	$S \equiv A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**Primjer 1.3.8**

Utvrđite vrijednost suda  $S \equiv (2 < 3) + (3 = 2 + 2)$ .

Sud "2 < 3" je istinit, ali je sud "3 = 2 + 2" neistinit, pa prema definiciji disjunkcije, zaključujemo da je sud S istinit.

**Primjer 1.3.9**

Odluka o vožnji taksijem može se donijeti na temelju slijedećeg složenog suda: "Žuri mi se ili pada kiša". Ovo je primjer disjunkcije, jer se na vožnju taksijem odlučujemo ako je jedan od osnovnih sudova istinit ili ako su oba istinita.

### Tablice istinitosti

Sudovi mogu imati složenu strukturu, tj. mogu se sastojati od više jednostavnih sudova povezanih s više logičkih operatora. Tada se javlja problem kako odrediti istinitost takvog složenog suda. Jedan od načina je sastavljanje tablice istinitosti. Primjerice, ako je zadan složeni sud  $A \bullet (B+C)$  možemo sastaviti slijedeću tablicu i pomoću nje odrediti istinitost suda  $A \bullet (B+C)$ .

A	B	C	B+C	$A \bullet (B+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

### Primjer 1.3.10

Kao primjer disjunkcije naveden je sud "Žuri mi se ili pada kiša" na temelju kojeg se donosi odluka o vožnji taksijem. Taj sud bi mogli proširiti tako da glasi ovako: "Imam dovoljno novaca i žuri mi se ili pada kiša". Ovakav sud odgovara sudu  $A \bullet (B+C)$  ako slovom A označimo sud "Imam dovoljno novaca", slovom B sud "Žuri mi se" i slovom C sud "Pada kiša". Na vožnju taksijem odlučujemo se kada je složeni sud  $A \bullet (B+C)$  istinit.

### Pitanja:

- Utvrđite istinitost slijedećih sudova:
  - $8 = 10-2$
  - $3 < 4-3$
  - $810 \neq 108$
  - 55 je prirodni broj
  - 4.5 je cijeli broj
  - Zbroj kutova u trokutu je  $180^\circ$
- Napišite negacije slijedećih sudova:
  - Danas je utorak.
  - Sat ima 60 minuta.
  - $y < 100$
  - $x \geq 12$
- Zadani su sudovi:  $A \equiv$  "Hladno je." i  $B \equiv$  "Pada kiša.". Napišite:
  - $\neg A$
  - $A \bullet B$
  - $A + B$
  - $A + \neg B$
  - $\neg A \bullet B$
- Načinite tablice istinitosti za slijedeće sudove:
  - $A + C$
  - $A \bullet B$
  - $\neg A + (B \bullet C)$
  - $\neg B \bullet (A + C)$
  - $C + (B \bullet \neg A)$
  - $C \bullet (\neg A + \neg B)$